TRANSCRIPTION DU MODULE FILIPÉ
« PROBABILITÉS - MODÉLISATION ET OUTILS »

Table des matières

PARTIE A – Probabilités : le cadre probabiliste

SÉQUENCE 1 - Introduction

Nous allons tout d'abord vous présenter ce module intitulé « Probabilités : modélisation et outils ».

Je commencerai l'exposé en évoquant la notion d'expérience aléatoire, puis je décrirai le modèle probabiliste et enfin j'illustrerai les propriétés de mesure d'une probabilité. Ensuite, j'introduirai la notion de variable aléatoire qui est une notion essentielle du modèle probabiliste.

Ensuite je passerai la parole à Jeanne.

Quant à moi je présenterai un exemple de modélisation aléatoire dans un cas simple de gestion de stock qui nous permettra d'appliquer les outils présentés par Michel.

SÉQUENCE 2 - Expérience : jet d'un dé

Si on consulte un dictionnaire, on peut y lire que déterminer une probabilité, c'est attribuer à un événement une grandeur qui mesure ses chances de réalisation.

On s'intéresse donc ici à des événements qui sont imprévisibles ou encore aléatoires par opposition à des événements certains.

Examinons quelques exemples pour illustrer cette notion d'expérience aléatoire.

Par exemple, on jette un dé à six faces.

C'est une expérience parfaitement déterministe et qui obéit aux lois de la mécanique classique.

On peut théoriquement déterminer le mouvement du dé. Mais pour pouvoir résoudre les équations du mouvement, il faudra déterminer avec une grande précision

- la position exacte du dé dans la main
- le mouvement complet de la main
- les divers coefficients de frottement
- etc.

pour ensuite résoudre des équations qui vont sans doute être très difficiles. On sent bien que c'est une tâche impossible.

Ce qui est aussi perceptible, c'est qu'une petite modification ou une petite erreur sur l'un des paramètres, va complètement modifier le résultat attendu : on calcule et on s'attend à obtenir un 6 et on obtient un 1. C'est une expérience physique très instable et c'est cette instabilité qui donne le caractère aléatoire à cette expérience.

SÉQUENCE 3 - Expérience : central téléphonique

Considérons maintenant un central téléphonique qui réalise des connexions entre les différents clients qui souhaitent entrer en communication. Dans cette expérience, tout est aléatoire :

- le début d'un appel
- la durée de l'appel
- le destinataire de l'appel

et aucune équation de la physique ne permettra de modéliser un tel système.

Alors comment va-t-on modéliser ces situations et faire du "Calcul de Probabilités" puisque dans le premier cas les équations sont impossibles à résoudre et dans le second cas tout est aléatoire ?

SÉQUENCE 4 - Modélisation : jet d'un dé

Si l'on jette un dé un grand nombre de fois, on retrouve une certaine stabilité - caractère indispensable pour la modélisation.

Supposons que l'on jette le dé N fois et que l'on obtienne N1 fois le nombre 1.

On appelle fréquence d'apparitions du 1 le rapport entre N1 et N.

$$F_1^{(N)} = \frac{N_1}{N}$$

Si le matériau de fabrication du dé est homogène (on dit alors que le dé est bien équilibré), l'expérience montre que cette fréquence va converger vers la valeur $\frac{1}{6}$. Et c'est ce nombre $\frac{1}{6}$ qui sera appelé la probabilité d'apparition du 1.

SÉQUENCE 5 - Modélisation : central téléphonique

Dans cette modélisation probabiliste, on ne répond pas aux mêmes questions que dans une modélisation par les équations de la mécanique. Le calcul des probabilités ne vous permettra jamais de prédire quelle est la face qui va tomber lors du prochain jet. Il vous donne des indications sur ce qui peut se passer lors d'un grand nombre de jets, ce qui permet

- de comparer les probabilités de différents événements
- d'évaluer des risques
- et de prendre des décisions.

Dans l'exemple du central téléphonique, si ce qui se passe à un instant donné est imprévisible, en observant le comportement du central pendant une durée importante, on pourra sans doute déterminer des quantités moyennes, par exemple :

- le nombre moyen de clients entre t0 et t1
- la durée moyenne des appels pendant cette période
- la probabilité pour que le client A appelle le client B
- etc.

Et ce sont ces valeurs moyennes qui vont permettre d'obtenir une modélisation aléatoire du fonctionnement du central et d'optimiser sa taille et ses ressources pour satisfaire un maximum de clients – notamment éviter qu'un client soit rejeté - et ceci à un moindre coût.

Historiquement, cet exemple est très important puisque ça a été un des premiers domaines industriels dans lequel le calcul des probabilités a été appliqué, et ceci notamment grâce aux travaux d'un ingénieur danois F. Erlang dans les années 1920.

SÉQUENCE 6 - Le modèle probabiliste

Voici le modèle qui a émergé après de nombreux travaux.

Ce modèle est constitué de trois éléments :

1. L'ensemble noté traditionnellement - en France - grand oméga (Ω) et qui permet de décrire tous les résultats possibles de l'expérience
2. L'ensemble grand A des événements dont on calcule la probabilité
3. et enfin la probabilité $\mathbb{P}$ elle-même.

Et ceci constitue le triplet (Ω, A, $\mathbb{P}$).

Illustrons le rôle de ces trois éléments au travers d'exemples.

SÉQUENCE 7 - Jet de deux dés

Considérons par exemple le jet de deux dés. Un résultat de l'expérience est alors un couple de valeurs, et Ω (grand oméga) est l'ensemble de tous les couples formés des nombres de 1 à 6

$$\Omega = \{(1,1), (12), \ldots, (6,6)\}$$

On appelle événements élémentaires et on les note généralement ω (petit oméga) les éléments de cet ensemble Ω.

$$\omega = (n,\ m)$$

Si les dés sont bien équilibrés, tous les couples ont la même probabilité d'apparaître. On parle alors de cas équiprobable.

Ici, comme il y a 36 couples possibles, la probabilité de chacun de ces couples est de $\frac{1}{36}$.

$$\mathbb{P}\ (\omega) = \frac{1}{36}$$

Un événement sera, par exemple, la somme des points qui vaut 5. Il y a quatre couples qui donnent une somme de 5 et comme nous sommes dans le cas équiprobable, il suffit de compter (on dit encore de dénombrer) tous les cas possibles. Et donc, dans ce cas, la probabilité pour que la somme soit 5 sera de 4/36 (quatre trente-sixième) donc de 1/9 (un neuvième).

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

SÉQUENCE 8 - Jeu de pile ou face

Etudions maintenant un jeu de pile ou face.

Deux joueurs A et B jouent à pile ou face. C'est le joueur A qui commence. Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs a obtenu pile. On notera pile par 1 et face par 0.

L'ensemble Ω est alors l'ensemble suivant :

$$\Omega = \{1, 01, 001, \ldots, \ldots\}$$

C'est un ensemble infini dénombrable.

Les événements élémentaires peuvent être notés de la façon suivante :

$$\omega_n = \underbrace{00\ldots00}_{n-1}1$$

Pour définir la probabilité de ces événements élémentaires, on utilise un argument d'indépendance que l'on ne détaillera pas ici, mais qui montre que les probabilités se multiplient. Ainsi la probabilité de l'événement ωn vaut un sur deux puissance n.

$$\mathbb{P}(\omega_n) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}}_{n-1}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{1} = \frac{1}{2^n}$$

SÉQUENCE 9 - Durée de vie d'un composant

Enfin, on étudie la durée de fonctionnement - on parle de durée de vie - d'un composant électronique. A partir d'une origine des observations, on observe l'instant aléatoire où le composant tombe en panne. Même si la durée de vie est finie, on n'a pas connaissance d'une durée de vie maximum à priori, donc il est utile de poser pour Ω l'ensemble ℝ+*, l'ensemble des réels strictement positifs.

$$\Omega = \mathbb{R}_+^*$$

Un événement sera, par exemple : « le composant est encore en fonctionnement à t0 », auquel on associe une durée de vie dans l'intervalle [t0, + ∞ [.

Ou bien l'événement "La panne survient entre t0 et t1", auquel on associe une durée de vie dans l'intervalle [t0, t1] .

Dans ce cas, pour définir la propriété ℙ, on doit se donner la probabilité de tomber dans n'importe quel intervalle [t0, t1].

Comment peut-on définir toutes ces quantités ? C'est en général grâce à la donnée d'une fonction - f (t) - qui permet d'obtenir cette probabilité par intégration entre t0 et t1.

$$\mathbb{P}([t_0, t_1]) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt$$

C'est ce qu'on appelle la densité de probabilité.

SÉQUENCE 10 - La probabilité comme mesure

Après ces exemples, revenons à la définition axiomatique de la probabilité. La probabilité est une fonction qui associe à tout événement, un réel compris entre 0 et 1

$$\mathbb{P} : A \in \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{P}(A) \in [0, 1]$$

Mais ce n'est pas n'importe quelle fonction. Que doit-elle vérifier comme axiome de définition ?

Intuitivement, si deux événements A et B ne peuvent pas se produire ensemble (on dit aussi que les événements A et B sont disjoints), la probabilité de la réunion est alors la somme des probabilités.

$$\text{Si } A \cap B = \varnothing \text{ alors } \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Si on a une famille finie d'ensembles deux à deux disjoints la propriété doit subsister.

$$\text{Si } A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ deux à deux disjoints } i.e. \ A_i \cap A_j = \varnothing$$

$$\text{si } i \neq j \ \text{ alors } \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right)$$

On a enfin besoin de la généralisation de cette propriété à une suite d'ensembles, donc si Ai est une suite dénombrable d'ensembles deux à deux disjoints et bien, la probabilité de la réunion est encore la somme des probabilités.

Généralisation à une suite dénombrable

$$\text{Si } \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ est une suite d'ensembles 2 à 2 disjoints } A_i \cap A_j = \varnothing$$

$$\text{si } i \neq j \ \text{ alors } \mathbb{P}\left(\cup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right)$$

SÉQUENCE 11 - Définition axiomatique

Voici finalement les deux seules actions de définition d'une probabilité. La probabilité d'un ensemble Ω doit être égal à 1 et $\mathbb{P}$ doit posséder la propriété précédente qui est appelée propriété de σ – additivité.

2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

3. pour toute suite $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'ensembles 2 à 2 disjoints

   si $i \neq j$ alors $\mathbb{P}\left(\cup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right)$

σ-additivité de $\mathbb{P}$

Nous allons illustrer celle-ci sur un exemple.

SÉQUENCE 12 - Jeu de pile ou face (suite)

Reprenons l'exemple des deux joueurs A et B jouant à pile ou face, A commence et le premier joueur qui obtient pile gagne. Quelle est alors la probabilité pour que le joueur A gagne ?

$$E = \text{"le joueur } A \text{ gagne"}$$

Il est facile de voir que cet événement contient tous les événements élémentaires ω_{2k+1} (petit oméga indice 2k+1)

$$E = \{1, 001, 00001, \ldots, \omega_{2k+1}, \ldots\}$$

ce que l'on peut écrire de la façon plus condensée sous forme de réunion dénombrable :

$$E = \cup_{k=0}^{\infty} \{\omega_{2k+1}\}$$

Les événements réduits à ω_{2k+1} sont deux à deux disjoints et donc, on calcule la probabilité cherchée par sommation d'une série élémentaire

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\omega_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{2}{3}$$

A gagne avec une probabilité de deux tiers, et donc en commençant, le joueur A a deux fois plus de chances de gagner que le joueur B.

SÉQUENCE 13 - Conséquence des axiomes

Ce qui est extraordinaire, c'est que malgré la simplicité des axiomes de définition, la notion de probabilité est suffisamment riche pour calculer la probabilité de très nombreux événements.

Par exemple, on peut déduire de ces axiomes que : si l'on a une suite croissante d'ensembles, la probabilité de la réunion s'obtient par un passage à la limite

$$\text{Si } \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ est une suite } \textbf{croissante} \text{ d'ensembles } i.e.\ A_i \subset A_{i+1} \quad \forall i$$

$$\mathbb{P}(\cup_{i=0}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

avec une propriété analogue pour les suites décroissantes.

$$\text{Si } \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ est une suite } \textbf{décroissante} \text{ d'ensembles } i.e.\ B_{i+1} \subset B_i \quad \forall i$$

$$\mathbb{P}(\cap_{i=0}^{\infty} B_i) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(B_i)$$

SÉQUENCE 14 - n jets de pile ou face

Voici un exemple d'application. On considère un jeu de pile (1) ou face (0), cette fois-ci, avec une pièce mal équilibrée. Après un grand nombre de jets, on a constaté expérimentalement que l'on pouvait attribuer la probabilité de 1/3 (un tiers) à pile et de 2/3 (deux tiers) à face.

$$\begin{array}{l} \text{Pile } (1) \ \rightarrow \ \frac{1}{3} \\ \text{Face } (0) \ \rightarrow \ \frac{2}{3} \end{array}$$

Si l'on note E_n l'événement : " Pile n'est pas sorti lors des n premiers jets"

$$E_n = \text{"Pile n'est pas sorti lors des } n \text{ premiers jets"}$$

on a, toujours grâce à un argument d'indépendance, probabilité d'En égale deux tiers à la puissance n

$$\mathbb{P}(E_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Quelle est alors la probabilité pour que pile ne sorte jamais ?

Pile ne sort jamais si et seulement si, pile n'est pas sorti lors des n premiers jets et ceci quel que soit l'entier n

$$E = \text{"Pile ne sort jamais"}$$

Mathématiquement, cette expression "quel que soit l'entier n" se traduit exactement par l'intersection. Ainsi, l'événement E s'écrit comme l'intersection des E_n

$$E = \cap_n E_n$$

Il est clair que la suite d'ensembles E_n est décroissante et donc, d'après ce qui précède, la probabilité de E se calcule par passage à la limite et vaut donc 0.

$$\mathbb{P}(E) = \lim_n \mathbb{P}(E_n) = \lim_n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Ainsi, en se basant sur les axiomes des probabilités, on a démontré rigoureusement que la probabilité de cet événement était égale à 0, ce qui est effectivement ce à quoi on peut s'attendre.

SÉQUENCE 15 - Variable aléatoire

Nous allons maintenant étudier la notion de variable aléatoire. Notion qui complète le modèle probabiliste que l'on a introduit précédemment.

Partons d'un exemple et considérons le jet de deux dés. On a déjà vu que l'espace Ω est constitué des couples d'entiers de 1 à 6.

$$\Omega = \{(1,1), (12), \ldots, (6,6)\}$$

Si l'on s'intéresse seulement à la somme des points marqués, Il est naturel d'introduire l'application, notée X, de Ω dans ℝ qui à ω associe la somme n + m.

$$\begin{array}{llll} X: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega = (n,m) & \longrightarrow & X(\omega) = n + m \end{array}$$

$$X(1,6) = 7$$

Une telle application définie sur un espace de probabilité est ce que l'on appelle une **variable aléatoire**. Si l'on veut calculer la probabilité pour que la somme des points soit égale à 8, ce que l'on écrira {X = 8}, on cherche tous les couples qui donnent 8

$$\{X = 8\} = \{(2,6), (3,5), (5,3), (6,2), (4,4)\}$$

et on a immédiatement : probabilité pour que {X = 8} égale 5/36 (5 trente-sixième).

$$\mathbb{P}(\{X = 8\}) = \frac{5}{36}$$

Un commentaire sur cette appellation de variable aléatoire qui prête souvent à confusion.

En mathématiques, lorsqu'on considère une fonction f (petit f) qui à X associe f(X), la variable c'est x.

Ici pour une fonction du type Ω on associe X(Ω), la seule particularité est que la variable Ω prend ses valeurs dans un espace dans lequel est définie une probabilité. Et c'est pour ça qu'on l'appelle variable aléatoire.

Une définition plus correcte serait « fonction à variable aléatoire » mais il se trouve que l'on garde traditionnellement en probabilités cette dénomination de variable aléatoire.

SÉQUENCE 16 - Obtention du 6 (1)

On jette maintenant un dé jusqu'à l'obtention d'un 6.

Ce qui nous intéresse ici, n'est pas tant la description complète de l'espace Ω, d'ailleurs assez difficile à écrire, que le nombre de parties nécessaire pour obtenir 6. Et c'est ce nombre qui définit la variable aléatoire que l'on va étudier.

$$X = \text{le nombre de parties nécessaires pour obtenir un } 6$$

Deux caractéristiques sont essentielles lorsque l'on étudie une variable aléatoire.

D'une part l'ensemble des valeurs prises. Ici c'est l'ensemble des entiers strictement positifs, noté ℕ*

$$1.\ X \text{ prend ses valeurs dans } \{1, 2, 3, \ldots, \} = \mathbb{N}^*$$

Puis, d'autre part, la loi de probabilité de X, c'est-à-dire, dans ce cas, la connaissance de toutes les probabilités, probabilités pour que X vaille n et ceci quel que soit l'entier n.

$$2.\ \text{La } \textbf{loi de probabilité} \text{ de } X$$

$$\mathbb{P}(X = n) = ? \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Pour faciliter la notation, il est judicieux de noter 0 pour l'événement « ne pas obtenir un 6 lors d'un jet » et 1 pour l'obtention du 6.

$$\begin{cases} 0 = \text{"ne pas obtenir un 6 lors d'un jet} \\ \quad 1 = \text{"obtenir le 6 lors d'un jet"} \end{cases}$$

SÉQUENCE 17 - Obtention du 6 (2)

Les probabilités de ces événements sont faciles à calculer et on en déduit, comme on l'a fait déjà, la probabilité de l'événement {X = n}.

$$\mathbb{P}(0) = 5/6 \text{ et } \mathbb{P}(1) = 1/6$$

$$\{X = n\} == \underbrace{00\ldots00}_{n-1}1$$

$$\mathbb{P}(X = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Une question que l'on se pose alors est : "combien faut-il en moyenne de jets pour obtenir 6" ?

En probabilités c'est la notion d'espérance mathématique qui correspond à cette notion de valeur moyenne et qui est notée par le symbole :

$$\mathbb{E}(X)$$

SÉQUENCE 18 - Obtention du 6 (3)

Cette espérance se calcule comme la somme des valeurs prises par la variable aléatoire, ici n, pondérées par leurs probabilités.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathbb{P}(X = n)$$

Un calcul élémentaire portant sur une série géométrique montre que cette espérance vaut 6.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\mathbb{E}(X) = 6$$

Le nombre moyen de jets nécessaire est donc 6. Ceci correspond bien à l'intuition puisque la probabilité de l'événement était de 1/6.

Et comment peut-on interpréter ce résultat ?

Renouvelons N fois l'expérience complète, c'est-à-dire le jet du dé jusqu'à l'obtention du 6. Et notons xi le nombre de jets nécessaire lors de la ième expérience.

Alors, le nombre moyen de jets nécessaire au cours des n expériences c'est

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_N}{N}$$

Quel est alors le rapport avec l'espérance de X que l'on a présentée comme donnant une évaluation du nombre moyen ?

Et bien, ce rapport est donné par l'un des théorèmes fondamentaux du calcul des probabilités que l'on appelle la loi des grands nombres et qui affirme que cette moyenne converge quand N tend vers l'infini vers l'espérance de X.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_N}{N} = \mathbb{E}(X)$$

SÉQUENCE 19 - Conclusion

J'ai évoqué dans le début de cette présentation les différents éléments du modèle probabiliste, je laisse maintenant la parole à Jeanne qui va vous présenter une situation concrète et qui va vous montrer comment ces éléments s'introduisent et s'utilisent.

PARTIE B – Probabilités : un exemple de modélisation aléatoire

SÉQUENCE 1 : Introduction

Bonjour.

Après le cadre général posé par Michel Doisy, nous allons maintenant étudier un exemple de modélisation aléatoire qui permet de prédire et d'anticiper une situation classique de gestion de stocks face à une demande incertaine ou aléatoire.

Cet exemple nous permettra d'aller plus loin dans la notion de variable aléatoire introduite par Michel, en retrouvant un certain nombre de lois de probabilités classiques.

De plus nous verrons comment une approximation par une loi normale nous permet de calculer une approximation de la probabilité de certains événements.

SÉQUENCE 2 : Situation (1)

Décrivons tout d'abord la situation : nous sommes dans une librairie et le libraire dispose d'un livre « Probabilités et statistiques pour ingénieurs » qui est très demandé. Mais cette demande est aléatoire, elle est incertaine. Le libraire a seulement pu estimer que la demande moyenne est de deux livres par jour.

SÉQUENCE 3 : Situation (2)

Cependant ce livre est très nécessaire aux étudiants pour préparer leurs examens. Si un étudiant arrive et que le livre n'est plus disponible, le client est très mécontent, s'en va et va acheter le livre chez le concurrent. On parle alors de "vente perdue".

SÉQUENCE 4 : Situation (3)

Pour satisfaire au mieux la demande, le libraire a intérêt à avoir un stock de livres relativement important. Mais un tel stock représente de l'argent immobilisé. Ces coûts de stockage sont aussi à minimiser pour le libraire.

Donc dans cette étude, on va aider le libraire à mieux comprendre la demande, à mieux évaluer ses risques et à gérer au mieux son stock de façon à minimiser les coûts de rupture et les coûts de stockage.

Nous ne ferons tout de même pas une analyse complète de cette situation de gestion de stocks.

SÉQUENCE 5 : La demande

Donc dans un premier temps, on va travailler autour de la demande et de la modélisation de la demande journalière, de la demande quotidienne. Elle n'est pas précisée, elle n'est pas prédictible, elle est incertaine. On la modélise par une variable aléatoire X. Cette variable aléatoire prend des valeurs entières. Donc en reprenant les mêmes notations que Michel Doisy, on écrira :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

Le libraire sait bien qu'un grand nombre de clients rentrent dans son magasin mais seul un petit nombre va demander ce livre. De façon naturelle, la loi de la demande est donc alors modélisée par une loi de Poisson aussi appelée loi des événements rares.

C'est-à-dire que cette loi est définie par un paramètre λ positif non nul et que pour tout entier n la probabilité que X = n est égale à :

soit $\lambda > 0$ $$P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Prenons un exemple pour λ = 2 : la probabilité qu'il n'y ait pas de demande dans la journée (personne ne vient demander le livre).

Donc on calcule la probabilité que X = 0 qui vaut alors :

$$P(X=0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}$$

$$P(X=0) = e^{-2} = 0.135$$

De la même façon, la probabilité qu'on lui demande une fois le livre dans la journée est la probabilité que X = 1 soit :

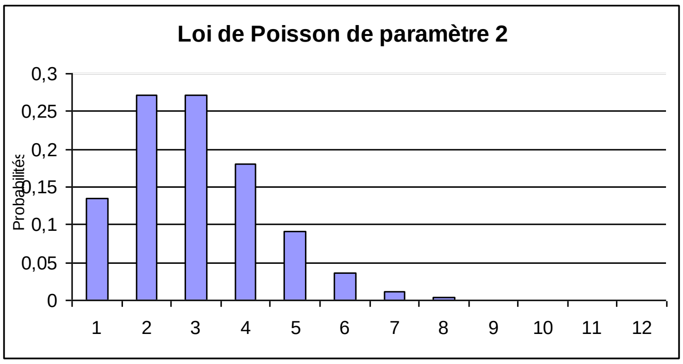
$$P(X=1) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}$$

ce qui, avec les valeurs numériques que l'on a choisies ici, conduit à :

$$P(X=1) = e^{-2} * 2 = 0.271$$

Donc on va synthétiser toutes ces informations dans le tableau suivant qui représente pour différentes valeurs de k les probabilités que la demande soit égale à ces valeurs. On retrouve les résultats précédents.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P(X=k)	0,135	0,271	0,271	0,18	0,09	0,036	0,012	0,003	9E-04	2E-04	4E-05	7E-06



Comme on l'a vu, la demande d'un point de vue mathématique peut prendre toutes les valeurs entières. Rien n'empêche qu'il y ait beaucoup beaucoup de demandes ce jour-là. Mais en fait on voit que la probabilité que la demande soit de 8 livres ou 9 livres est de l'ordre de 10-4 donc très faible.

En fait, vraisemblablement, la demande est inférieure à 7 ou 8 livres mais comment quantifier ceci ?

C'est ce que nous allons voir en introduisant la notion de probabilité cumulée.

SÉQUENCE 6 : Probabilité cumulée

Commençons par un exemple : quelle est la probabilité que la demande soit au plus de 2 livres dans la journée ?

C'est-à-dire, avec notre modélisation, quelle est la probabilité que X soit inférieur ou égal à 2 ?

La demande est à variable entière, le fait qu'elle soit inférieure ou égale à 2 revient à dire que soit elle est égale à 0, soit à 1, soit à 2.

$$\{X \leq 2\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\}$$

Ces événements sont disjoints donc la probabilité que X soit inférieur ou égal à 2 va être la somme de la probabilité que X = 0, plus probabilité que X = 1, plus probabilité que X = 2.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

Et finalement, en utilisant les résultats numériques précédents, on obtient que la probabilité que X est inférieur ou égal à 2 est égale à 0,677 soit 67,7 % de chances que la demande soit au plus de 2 livres dans la journée.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P(X=k)	0,135	0,271	0,271	0,18	0,09	0,036	0,012	0,003	9E-04	2E-04	4E-05	7E-06
P(X<=k)	0,135	0,406	0,677	0,857	0,947	0,983	0,995	0,999	1	1	1	1

On synthétise tous ces résultats dans le tableau. On notera que la probabilité que la demande soit inférieure ou égale à 8 avec 3 décimales est égale à 1.

Mais si on zoome en affichant plus de décimales, on voit apparaître qu'il n'en est pas tout à fait ainsi et que, par exemple, la probabilité que la demande soit inférieure ou égale à 8 est de 99,97%

Retenons cependant que la probabilité que la demande soit inférieure ou égale à 6 est égale à 99%

SÉQUENCE 7 : Événement contraire

Les outils que nous venons de décrire nous permettent maintenant de calculer n'importe quelle probabilité autour de la demande de façon simple.

Par exemple calculons que la probabilité de la demande soit supérieure ou égale à 3. C'est-à-dire que la demande soit égale à 3 ou 4 ou 5 ou peut-être même très très grande.

$$\{X \geq 3\} = \{X = 3\} \cup \{X = 4\} \cup \{X = 5\} \cup .....$$

Dans ce cas, plutôt que de calculer une somme infinie, il va être plus simple de passer par la probabilité de l'événement contraire. C'est-à-dire qu'on va écrire que :

$$\{X < 3\} = \{X \leq 2\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\}$$

L'événement « X supérieur ou égal à 3 » a pour contraire l'événement « X strictement inférieur à 3 ».

Dans ces conditions, la probabilité que X soit supérieur ou égal à 3 est égale à : 1 moins la probabilité que X est strictement inférieur à 3.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$$

La probabilité… la demande, pardon… étant une variable aléatoire discrète, cela signifie que la demande est inférieure ou égale à 2.

Donc finalement on obtient, très simplement, que la probabilité que X soit supérieur ou égal à 3 est égale à $1 - P(X \leq 2)$

qui est la probabilité cumulée que nous venons d'exprimer dans le tableau précédent.

Donc on obtient que cette probabilité est égale à 32,3%

$$P(X \geq 3) = 1 - 0.677 = 0.323$$

SÉQUENCE 8 : Espérance de la demande

Après tous ces calculs sur des probabilités, il est intéressant de se demander, avec les hypothèses que l'on a faites sur la loi de la demande - donc je vous rappelle une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$ – on peut maintenant se demander quelle est la valeur moyenne de la demande. Mathématiquement il s'agit alors de calculer l'espérance de la variable aléatoire X

E(X)

Il s'agit d'une loi de Poisson, vous avez démontré dans votre cours de probabilités que l'espérance d'une loi de Poisson de paramètre λ est justement λ, le paramètre de cette loi. On obtient ici que la demande moyenne est de 2 livres par jour, ce qui est bien ce qu'avait observé le libraire.

Rappel de la définition :

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\mathbb{P}\left(X = n\right)$$

Ici

$$E(X) = \Sigma_{n=1}^{\infty} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

D'où :

$$E(X) = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

On fixe $\lambda = 2$

SÉQUENCE 9 : Gestion des stocks

Nous avons maintenant tous les éléments pour revenir au problème de la gestion des stocks tel que le libraire doit le… les gérer. On a vu que la demande moyenne est de 2 livres par jour.

Dans un premier temps, notre libraire décide donc d'avoir 2 exemplaires en stock. Dans ces conditions, quel va être le risque de rupture ? C'est-à-dire, quelle va être la probabilité que la demande soit strictement supérieure au niveau de stock sur la journée ?

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.677 = 0.323$$

Nous allons calculer la probabilité que la demande soit strictement supérieure à 2. Par les mêmes démarches que précédemment en passant à l'événement contraire, on obtient 32% de chances d'avoir une rupture de stock.

C'est-à-dire que si le libraire a en stock la demande moyenne journalière, il aura 32 % de chances, une chance sur 3 pratiquement, d'être en rupture de stock dans la journée. C'est un risque qu'il ne peut pas prendre. Il va donc déterminer le niveau de stock pour que le risque de rupture soit inférieur à 10%. C'est le risque qu'il accepte de prendre.

Il cherche donc un entier k tel que la probabilité que X soit strictement plus grand que k est inférieure ou égale à 0.10

$$P(X > k) \leq 0.10$$

On reprend donc le tableau précédent en regardant maintenant la dernière ligne qui correspond au risque de rupture.

En regardant ce tableau, on voit alors qu'il suffit d'avoir 4 livres en stock chaque matin pour que la probabilité de rupture soit inférieure à 10%. Elle sera alors égale à 5,3%.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P(X=k)	0,135	0,271	0,271	0,18	0,09	0,036	0,012	0,003	9E-04	2E-04	4E-05	7E-06
P(X<=k)	0,135	0,406	0,677	0,857	0,947	0,983	0,995	0,999	1	1	1	1
P(X>k)	0,865	0,594	0,323	0,143	0,053	0,017	0,005	0,001	2E-04	5E-05	8E-06	1E-06

Conclusion : Stock = 4

Probabilité de rupture p=0.053

SÉQUENCE 10 : Étude sur 100 jours (1)

Donc, grâce à l'étude précédente, le libraire a dimensionné son stock quotidien à 4 exemplaires. Il se pose maintenant la question d'une étude sur le plus long terme : que se passe-t-il sur une période de 100 jours ?

La modélisation retenue en ce cas, consiste à modéliser la demande de chaque jour i par une variable aléatoire X_i (X indice i). Nous dirons Xi. Les hypothèses, de façon classique, sont de considérer que les demandes sont indépendantes 2 à 2, c'est-à-dire que la demande du jour i est indépendante de la demande du jour j mais que, quel que soit le jour, la loi de la demande est identique à la loi étudiée précédemment, c'est-à-dire une loi de Poisson de paramètre 2.

On compte alors le nombre de jours avec rupture sur une période de 100 jours. Ce nombre est encore une variable aléatoire qui prend des valeurs entre 0 et 100.

S = VA

C'est en fait une loi binomiale de paramètres n = 100, p = la probabilité de rupture c'est-à-dire 0.053

S suit B(n=100, p=0.053)

Ceci est un résultat classique que vous avez dû étudier dans vos cours de probabilités.

La probabilité que le nombre de ruptures S soit égal à k est alors $p^k(1-p)^{n-k}$

(probabilité de k succès n-k échecs) multiplié par le nombre de façons d'avoir k succès n-k échecs. On note ce nombre C_n^k (Cnk) ou alors k parmi n.

$$k \in \{1, 2, ..., n\} \quad P(S = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Le nombre moyen de jours de rupture c'est-à-dire l'espérance de S, c'est-à-dire l'espérance d'une loi binomiale est alors n*p (n fois p) c'est-à-dire ici 5,3

$$E(S)=n*p=5.3$$

SÉQUENCE 11 : Étude sur 100 jours (2)

Il se demande alors quelle est la probabilité d'avoir au plus 10 jours de rupture c'est-à-dire « probabilité que S soit inférieur ou égal à 10 ».

C'est une variable discrète donc on est ramené à la somme de 11 termes du type P(S)=k pour k allant de 0 jusqu'à 10.

$$P(S \leq 10) = P(S = 0) + P(S = 1) + ... + P(S = 10) = \Sigma_{k=0}^{10} P(S = k)$$

En termes de calcul numérique, cela n'est pas forcément très simple à calculer. Donc soit on utilisera un logiciel spécialisé soit alors, habituellement, on fait une approximation en utilisant le théorème central limite. Ce théorème central limite est très classique et dans le cas d'une loi binomiale, nous l'écrirons de la façon suivante :

On définit à partir de la variable S une variable aléatoire Z de la façon suivante :

$$Z = \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

On sait alors que cette suite indiciée par n converge en loi vers la loi normale centrée réduite quand n devient grand. Nous ici, nous l'utiliserons en disant que : si n est grand, on peut approcher la loi de Z par la loi normale centrée réduite.

soit S une variable aléatoire de loi binomiale $B(n,p)$, avec $n \in \mathbb{N}$, $p \in]0,1[$. On définit

$$Z = \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Cette suite converge en loi vers la loi normale centrée réduite quand n tend vers ∞.

C'est ce que nous faisons immédiatement pour calculer la probabilité que S soit inférieur ou égal à 10. En faisant le changement de variable, on se ramène à calculer la probabilité que Z soit inférieur ou égal à 2,12.

$$P(S \leq 10) = P(Z \leq \frac{10 - 5.3}{\sqrt{5.3 * (1 - 0.053)}}) = P(Z \leq 2.120)$$

La probabilité d'une loi normale ne se calcule pas simplement, mais on dispose de tables et on obtient le résultat :

$$P(Z \leq 2.120) = 0.983$$

Nous en déduisons que la probabilité que le nombre de jours avec rupture soit inférieur ou égal à 10 est de 98% de chances.

Notre libraire après toute cette étude, considère alors que c'est donc le bon choix et il décide de fonctionner avec un stock quotidien de 4 exemplaires de ce livre.

SÉQUENCE 12 : Conclusion

Et maintenant, croyez-vous que nous allons trouver le livre dans la librairie ?!