TRANSCRIPTION DU MODULE FILIPÉ
« METHODES NUMERIQUES : DIFFERENCES FINIES »

Table des matières

1. Introduction

L'objet de cette présentation est de proposer quelques rappels du cours de Méthodes Numériques concernant la Méthode des Différences Finies.

2. Conditions

Dans un souci de simplicité, on se place dans le cadre d'un problème scalaire, en l'occurrence l'équation de la chaleur, sur un domaine monodimensionnel. Cette équation de la chaleur est constituée des termes suivants :

- un terme d'évolution temporelle (ou de stockage) faisant apparaître la masse volumique et la capacité calorifique,
- un terme de transport si le domaine est animé d'un mouvement de vitesse V,
- un terme de conduction
- et un terme de source de chaleur (plus exactement, densité de source de chaleur).

Pour que cette équation, définie sur un domaine donné, constitue un problème bien posé, il faut lui associer des conditions initiales (CI) et des conditions aux limites (CL).
En ce qui concerne les conditions initiales (CI), il s'agit d'affecter une température connue à l'instant t0 en tous les points du domaine.
En ce qui concerne les conditions aux limites (CL), pour chaque point de la frontière, deux possibilités se présentent :

- soit on impose la valeur de l'inconnue (en l'occurrence T) : c'est une CL de type Dirichlet,
- soit on impose la variation de l'inconnue (en l'occurrence le flux à la frontière) : c'est une CL de type Neumann.

Dans ce dernier cas, on peut imposer une valeur (par ex. nulle si isolé) ou la forme d'une loi physique dépendant du type d'échange à la frontière ; par exemple, dans le cas de la convection, le flux est proportionnel à T-Ta ou Ta est la température ambiante à l'extérieur du domaine. La constante de proportionnalité est h, un facteur d’échange surfacique.

3. Principe

Le principe de la Méthode des Différences Finies consiste à discrétiser le problème, à la fois dans l'espace et dans le temps.

La discrétisation spatiale conduit à chercher l'inconnue du problème, non pas partout, mais en des points particuliers qui constituent les nœuds d'une grille régulière.
Le pas de cette grille sera noté Delta_x.
La discrétisation temporelle conduit à envisager cette grille à une série d'instants successifs séparés par un pas de temps Delta_t.
En ce qui nous concerne, nous supposerons que la discrétisation spatiale reste inchangée entre deux instants.

L'équation dérivée partielle précédente est à donc à comprendre en un point m, à un instant n. C'est notamment vrai pour les Dérivées Partielles.
Dans ce contexte, le principe de la méthode des Différences Finies consiste à remplacer les dérivées partielles, toutes prises au point m, à l'instant n, par des expressions approchées faisant intervenir les valeurs aux points voisins du point m et aux instants voisins de l'instant n.

Nous avons dans le cas présent, trois dérivées à approcher :

- deux dérivées spatiales : une dérivée première et une dérivée seconde
- et une dérivée première en temps.

4. Approximations des dérivées spatiales

Voyons maintenant comment fournir des approximations de ces Dérivées Partielles.

Tout d'abord, les dérivées spatiales pour les points intérieurs du domaine : considérons un point m et ses points voisins à gauche et à droite. Nous avons deux dérivées spatiales, une dérivée première et une dérivée seconde, à approcher.
Pour cela, nous effectuons deux développements de Taylor au point m, l'un à droite vers le point m+1, l'autre à gauche vers le point m-1. Les termes d'ordre 3 sont négligés.

En combinant ces deux Développements, on obtient les deux approximations suivantes : (…)
Vu les termes négligés dans les Développements de Taylor, ces approximations sont d'ordre 2.

En ce qui concerne maintenant les points de la frontière : si on a des conditions de Dirichlet, c'est réglé, la valeur de T au point est connue car imposée.

Dans le cas de conditions de Neumann, on procède de la façon suivante. Considérons par exemple le point frontière md à droite du domaine.
Un seul Développement de Taylor peut être effectué, vers le point à l'intérieur du domaine, en l'occurrence ici vers la gauche. Il manque une seconde relation pour pouvoir déduire les valeurs des deux Développements Limités. Cette relation est précisément fournie par les conditions aux Limites de Neumann sur le flux de chaleur, que ce soit en termes d'une valeur donnée ou en termes d'une relation fonction de Température.
Dans les deux cas, et en combinant les deux relations, on obtient une approximation des dérivées première et seconde au point md.
On notera qu'ici la valeur de la normale extérieure est +1. Elle aurait valu -1 si l'on avait considéré le point frontière à gauche du domaine.

5. Approximations de la dérivée temporelle (1)

Pour ce qui est de la dérivée temporelle, on se retrouve devant un choix entre deux possibilités, qui correspondent en fait à deux visions radicalement différentes du schéma itératif.

Dans la première vision, on considère qu'à l'instant donné, n, on connaît la température en tous les points. On peut alors se projeter vers l'instant suivant n+1 et l'expression de la dérivée première en temps est une approximation du premier ordre faisant intervenir la différence des températures entre les instants n+1 et n. Une telle démarche conduit à un schéma que l'on qualifiera par la suite d'explicite.

Dans la seconde vision, on considère cette fois qu'à l'instant n, les températures sont inconnues. Pour se ramener à quelque chose de connu, il faut alors se tourner vers l'instant précédent et l'expression de la dérivée première en temps est une approximation du premier ordre faisant intervenir la différence des températures entre les instants n et n-1. Une telle démarche conduit à un schéma que l'on qualifiera par la suite d'implicite.

6. Approximations de la dérivée temporelle (2)

Une fois que toutes les Dérivées Partielles au point m et à l'instant n ont été approchées, il s'agit de reporter ces approximations dans l'équation discrétisée.

Pour alléger les notations, on supposera par la suite que k (la conductivité) ne varie pas avec la température, de telle qu'on sorte qu'on oublie le terme non-linéaire.

On retrouve les deux possibilités qui viennent d'être évoquées.
Tout d'abord, pour le schéma explicite : la dérivée temporelle fait intervenir les températures aux instants n et n+1, alors que toutes les dérivées spatiales de l'équation font intervenir les valeurs prises à l'instant n. Ainsi, une fois toutes remplacées dans l'équation, on obtient l'expression suivante où la température en tout point m à l'instant n+1 s'exprime en fonctions des températures au point m et aux points voisins toutes prises à l'instant n, et donc toutes connues. La seule inconnue de cette égalité est la température Tm, n+1
On a donc ici une formule, explicite, qui donne directement la valeur de l'inconnue à l'instant suivant.

7. Approximations de la dérivée temporelle (3)

En ce qui concerne la seconde possibilité, le schéma que l'on a qualifié d'implicite : la dérivée temporelle fait intervenir les températures aux instants n et n-1, alors que les dérivées spatiales sont toujours toutes définies à l'instant n.

Il s'ensuit l'expression suivante, semblable au premier abord à la précédente, mais finalement complètement différente. En effet, ce coup-ci, sur la ligne même ligne, on a plusieurs inconnues, en l'occurrence les températures aux points m, m+1 et m-1 à l'instant n. Seule valeur connue, la température en m à l'instant précédent m-1. Si l'on écrit cette même ligne pour tous les points m, on a en fait un système d'équations. En le mettant sous forme matricielle, on fait apparaître ici son caractère tridiagonal, dont les termes de la matrice et le second membre sont présentés ici.

En bref, alors que le précédent schéma, le schéma explicite, conduisait à une formule directe pour chaque point m, ce schéma, le schéma implicite, conduit à résoudre un système.
On voit donc, deux philosophies radicalement différentes. Comment alors choisir entre l'une ou l'autre ? Pour le moment, la simplicité de mise en œuvre de la méthode explicite semble être un bon argument.

8. Stabilité temporelle

Examinons un autre critère de choix entre ces deux schémas.
Ces deux schémas sont des schémas itératifs dans le temps. Se pose alors la question de la propagation d'une erreur au cours du temps au travers de ces schémas.
Pour étudier cette propagation, on se place dans un cadre simplifié : on suppose V=0 et dk/dT nul.
On va effectuer une analyse de stabilité, analogue à celle qui a été menée pour les équations différentielles : en chaque point et en chaque instant, on écrit la température comme la somme de la solution exacte et d'une erreur epsilon.

La propagation de cette erreur au travers des deux schémas, explicite et implicite, est la suivante.

Ce type d'analyse peut se faire au sens de l'analyse de Von Neumann : il s'agit de se donner une forme mathématique de l'erreur (en l'occurrence ici, en série de Fourier). L'introduction de cette forme mathématique dans les schémas de propagation donne les solutions suivantes (pour le détail des calculs, on se référera au cours).

Dans le cas du schéma explicite, on obtient une condition impliquant à la fois le pas de temps delta_t et le pas d'espace delta_x. e rapport dt/dx^2 doit être inférieure à une expression faisant intervenir les propriétés physiques du domaine. On peut remarquer au dénominateur le $delta\_x^2$. Si l'on raffine la discrétisation de la grille (pour une meilleure précision par exemple), il faut faire attention à la valeur du pas de temps. Pour un pas de grille 10 fois plus petit, il faudra un pas de temps 100 plus petit.

Dans le cas du schéma implicite, le problème ne se pose pas. On peut montrer que ce schéma est inconditionnellement stable.
On s'aperçoit donc que, si en termes de facilité de mise en œuvre, la préférence allait au schéma explicite, en termes de stabilité, c'est le schéma implicite qui est le mieux placé.
Comme souvent, le choix d'un schéma ou d'un autre dépendra donc du problème traité, des capacités informatiques utilisées et résultera sûrement d'un compromis.