TRANSCRIPTION DU MODULE FILIPE "MATHÉMATIQUES – NOTIONS DE BASE"

PARTIE A - « A PROPOS DES FONCTIONS » - Guy Athanaze, INSA Lyon

A propos des fonctions

Bonjour,

Je vais vous présenter dans ce module des notions de base en Mathématiques. Ces notions sont les notions de fonction, application, injection, surjection et bijection. Ces notions sont basées sur le concept de « relation ». D'après le dictionnaire français le « Larousse », les mathématiques sont les disciplines étudiant, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés des êtres ainsi que les relations qui s'établissent entre eux. Cette définition peut être débattue mais ce n'est pas l'objet de cette présentation.

Nous allons ici partir du concept de relation, puis en imposant certaines conditions, aboutir aux définitions de fonction, application, injection, surjection et bijection.

Pour simplifier le discours, tous les ensembles sur lesquels on va travailler ici seront supposés non vides.

Relation - 1'52

Nous allons définir ici la notion de « relation ».
Pour cela, prenons un exemple non forcément mathématique : grand E est l'ensemble d'élèves {Pierre, Paul, André, Jacques} et grand F l'ensemble des pays : France, Mexique, Brésil et Chine.
Nous pouvons alors associer à chaque élève le pays dans lequel il s'est rendu.
Nous allons schématiser cela par des « patates » (on dit plutôt par des diagrammes de Venn).

On définit ainsi une relation grand R qui va de grand E vers grand F.

Grand E est l'ensemble de départ et grand F l'ensemble d'arrivée pour la relation grand R.

La définition rigoureuse mathématiquement parlant d'une relation d'un ensemble E vers un ensemble F est un triplet d'ensembles grand R=(E, F, G), où G est une partie du produit cartésien $E \times F$…

Pour cet exposé, nous simplifierons cette définition en prenant la suivante : A tout élément de grand E, on associe par une règle précise grand R (non ambiguë) 0, 1 ou plusieurs éléments de grand F. Si à l'élément x de E, on associe l'élément y de F, on notera alors : x R y

On dit alors que y est une image de x par la relation grand R et que x est un antécédent de y par cette même relation. Par exemple, Pierre a pour image France et France a pour antécédent Pierre et Paul.

L'ensemble D des éléments de E qui ont au moins une image par R est l'ensemble de définition de grand R.

Tout au long de notre exposé, nous expliquerons les notions en utilisant un exemple de relation entre un ensemble d'élève et un ensemble de pays.

Dans notre exemple, l'ensemble de définition est {Pierre, Paul, Jacques}.
Il est important de faire la remarque suivante :
Sur le diagramme de Venn correspondant à une relation, à partir de chaque élément de l'ensemble de départ, il part 0, 1 ou plusieurs flèches. De même, à partir de chaque élément de l'ensemble d'arrivée, il arrive 0, 1 ou plusieurs flèches.

Fonction – 2'88

Nous allons maintenant, en partant d'une relation, imposer certaines conditions. Cela nous donnera la notion de fonction.
Soit E et F deux ensembles. On appelle fonction de grand E vers grand F une relation qui à tout élément de E associe au plus un élément de F, c'est-à-dire 0 ou 1 élément de F.
Graphiquement, sur le diagramme de Venn correspondant à une fonction, à partir de chaque élément de l'ensemble de départ, il va partir 0 ou 1 flèche. A partir de chaque élément de l'ensemble d'arrivée, il va arriver 0, 1 ou plusieurs flèches - comme pour une relation car la condition que nous avons imposée ici ne porte que sur l'ensemble de départ. Ici, nous avons une fonction de grand E égal l'ensemble {a,b,c,d,e} vers l'ensemble grand F égal {1,2,3,4,5,6}.

En prenant l'exemple des élèves et des pays, dans le cadre d'une fonction, chaque élève peut aller dans 0 ou 1 pays et chaque pays peut recevoir 0, 1 ou plusieurs élèves.

Lorsqu'une relation grand R est une fonction, on note habituellement y=R(x) plutôt que x R y. Dans ce cas, l'habitude veut que l'on appelle une fonction f, g etc au lieu de grand R.

Cette notation fonctionnelle est due à Leibniz, un allemand dans les années 1700.

Définissons maintenant l'image directe par petit f d'un ensemble grand C de E. L'ensemble des images des éléments de grand C par la fonction f, se note f(C) et par définition, nous obtenons :

$$f(C)=\{y\in F \ / \ \exists x\in C, y=f(x)\}$$

f(C) est l'image directe ou plus simplement l'image de grand C par f.
Dans notre exemple, avec C={a,b,c}, nous obtenons f(C)={1,2}.

Définissons maintenant l'image réciproque par f d'un ensemble grand D de grand F. L'ensemble des antécédents des éléments de grand D par la fonction f se note f -1(D). Nous avons donc :

$$f^{-1}(D)=\{x\in E \ / \ \exists y\in D, y=f(x)\}$$

$f^{-1}(D)$ est l'image réciproque de D par f.
Dans l'exemple, avec grand D égal l'ensemble {3,4}, nous obtenons $f^{-1}(D)$ égal le singleton {d}

Avec notre exemple, l'image réciproque d'un ensemble de pays est l'ensemble des élè-

ves s'y étant rendu.

Attention : Pour toute fonction f de grand A vers grand B, nous pouvons définir f-1(E) pour E sous-ensemble de B, que f soit bijective ou non (la notion de « bijectif » sera vue un peu plus loin dans le module). Nous n'avons pas, dans la définition de f -1 (E), utiliser f -1… mais f -1 (E).

Application – 1'01

Continuons à imposer des conditions. Les éléments de l'ensemble de départ qui n'ont pas d'image par la fonction f n'ont pas un grand intérêt lors de l'étude de f… On donne donc la définition suivante :

Soit E et F deux ensembles. On appelle application de E vers F une fonction de E vers F qui à tout élément de E associe un élément de F. Cet élément sera donc unique.

Une application de E vers F est donc une fonction de E vers F dont le domaine de définition est grand E.

Avec notre exemple, dans le cadre d'une application, tous les élèves se rendent dans 1 et 1 seul pays.

Graphiquement, sur le diagramme de Venn correspondant à une application, à partir de chaque élément de l'ensemble de départ, il part exactement une flèche. A partir de chaque élément de l'ensemble d'arrivée, il arrive toujours 0, 1(une) ou plusieurs flèches comme pour une relation car la condition que nous avons imposée ne porte que sur l'ensemble de départ.

En général, nous travaillons avec des applications. Si nous avons une fonction, il suffit de restreindre l'ensemble de départ à l'ensemble de définition pour obtenir alors une application.

Injection – 1'14

Intéressons nous, maintenant que nous avons mis des conditions sur l'ensemble de départ, à des conditions sur l'ensemble d'arrivée.

Soit petit f une application de grand E vers grand F. D'après la remarque précédente, nous pouvons nous ramener à étudier une application.

La notion d'injection

f est dite injective de grand E vers grand F lorsque tout élément de grand F admet au plus un antécédent dans grand E, c'est-à-dire 0 ou 1.

Graphiquement, sur le diagramme de Venn correspondant à une injection, à partir de chaque élément de l'ensemble de départ, il part exactement une flèche car nous travaillons avec une application. La condition que nous imposons maintenant fait qu'à partir de chaque élément de l'ensemble d'arrivée, il arrive 0 ou 1 flèche.

Mathématiquement, cela se traduit par la formule suivante :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

c'est-à-dire si 2 images sont égales, alors elles ont nécessairement le même antécédent, ou alors si vous préférez : pour que 2 images soient égales, il est nécessaire que les antécédents soient égaux ; remarquez dans l'écriture mathématique la position de la propriété « 2 images égales » : $f(x_1)=f(x_2)$ et de la propriété « les antécédents sont égaux » : $x_1=x_2$.

Avec notre exemple, dans le cadre d'une injection, chaque pays reçoit 0 ou 1 élève.

Surjection – 0'47

La notion de surjection

f est dite surjective de grand E vers grand F lorsque tout élément de grand F admet au moins un antécédent dans grand E par f, c'est-à-dire 1 ou plusieurs.
Mathématiquement, cela se traduit par l'une des propriétés équivalentes :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y=f(x)$$

ou alors f(E)=F

Graphiquement, sur le diagramme de Venn correspondant à une surjection, à partir de chaque élément de l'ensemble de départ, il part exactement une flèche car nous travaillons encore avec une application. La condition que nous imposons maintenant fait qu'à partir de chaque élément de l'ensemble d'arrivée, il arrive au moins une flèche (1, 2 ou plusieurs).

Avec notre exemple, dans le cadre d'une surjection, chaque pays reçoit au moins 1 élève.

Bijection – 1'43

La notion de bijection

f est dite bijective de grand E vers grand F lorsqu'elle est à la fois injective et surjective. Cela signifie que tout élément de grand F admet au plus et au moins c'est-à-dire un unique antécédent dans grand E par f.
Mathématiquement, cela se traduit par la formule suivante :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y=f(x)$$

Graphiquement, sur le diagramme de Venn correspondant à une bijection, à partir de chaque élément de l'ensemble de départ, il part exactement une flèche, car nous travaillons avec une application. La condition que nous imposons maintenant fait qu'à partir de chaque élément de l'ensemble d'arrivée, il arrive exactement une flèche. Ainsi, les ensembles grand E et grand F de départ et d'arrivée jouent un rôle symétrique. C'est ce rôle qui va être mis en évidence dans la suite.

Avec notre exemple, dans le cadre d'une bijection, chaque élève va dans un seul pays et chaque pays reçoit un seul élève.

La notion de bijection réciproque

Soit f une bijection de grand E vers grand F.

L'idée est d'inverser le sens des flèches.

Comme f est une bijection de grand E vers grand F, tout élément de grand E a une unique image dans grand F et tout élément de grand F a un unique antécédent dans grand E. Nous allons alors pouvoir définir l'application de grand F vers grand E qui à tout élément de grand F fait correspondre son unique antécédent dans grand E. On définit ainsi une bijection de grand F vers grand E, appelé bijection réciproque de f et notée f -1

Avec notre exemple, dans le cadre d'une bijection, f -1 est la fonction qui à chaque pays associe l'élève qui s'y est rendu.

Remarque : la notation f^{-1} a été choisie par analogie avec l'inverse des réels. Attention à ne pas confondre bijection réciproque f -1 (lorsqu'elle existe) et la fonction inverse $\frac{1}{f}$ (lorsqu'elle existe).

Interprétation graphique 1 – 0'54

Pour les fonctions réelles, nous utilisons souvent le graphe de f représenté non plus par des diagrammes de Venn mais dans le plan muni d'un repère.
Sur un tel graphe, nous pouvons voir si nous travaillons avec des fonctions, des applications, des injections, des surjections ou des bijections….

Voilà le graphe de la fonction carrée de l'intervalle [-3,3] dans l'intervalle [0,9].
Nous pouvons voir graphiquement que cette fonction est non injective mais surjective.
En traçant la droite horizontale d'équation « y=4 », on voit qu'elle coupe le graphe de f en deux points donc 4 a 2 antécédents et ainsi f est non injective.

Pour voir qu'elle est surjective de l'intervalle [-3,3] dans l'intervalle [0,9], il suffit de voir que toute droite horizontale d'équation « y=k » avec k élément de l'intervalle [0,9] y=k, $k \in [0,9]$ coupe le graphe de la fonction et donc tout k de [0,9] admet au moins un antécédent.

Interprétation graphique 2 – 0'39

Avec la fonction suivante de [-1,3] dans [-4,50] dont le graphe est le suivant
Nous pouvons voir graphiquement que cette fonction est injective mais non surjective.

En traçant la droite horizontale d'équation « y=20 », on voit qu'elle ne coupe pas le graphe de f donc 20 n'a pas d'antécédent et ainsi f est non surjective.

Pour voir qu'elle est injective de l'intervalle [-1,3] dans l'intervalle [-4,50], il suffit de voir que toute droite horizontale d'équation « y=k » avec k élément de [-4,50] y=k, $k \in [-4,50]$ coupe le graphe de la fonction en au plus 1 point (0 ou 1). D'où le résultat.

Conclusion

Nous pourrions de manière similaire voir si un graphe quelconque est le graphe d'une fonction ou d'une application. Dans ce cas, on tracerait des droites verticales et on chercherait si elles coupent ou non le graphe…

Dans ces définitions que nous venons d'évoquer que sont les notions de relation, fonction, application, injection, surjection et bijection, nous voyons que le rôle des ensembles de départ et d'arrivée sont en quelque sorte symétriques. Les définitions de fonction et d'application (on a des conditions sur l'ensemble de départ : on compte le nombre d'images) ont de fortes similarités avec les définitions d'injection et de surjection (on a des conditions similaires sur l'ensemble d'arrivée : on compte le nombre d'antécédents).

Les notions de fonction, application et bijection vous seront très utiles en analyse ; en algèbre linéaire, les notions d'injection et de surjection sont indispensables.

Je vous remercie d'avoir suivi ce module.

GLOSSAIRE

Termes essentiels et leur explication en français

Fonction : Soit E et F deux ensembles. On appelle fonction de E vers F une relation qui à tout élément de E associe au plus un élément de F, c'est-à-dire 0 ou 1 élément de F.

Application : Soit E et F deux ensembles. On appelle application de E vers F une fonction de E vers F qui à tout élément de E associe un unique élément de F.

Injection : Une application f est une injection de E vers F lorsque tout élément de F admet au plus un antécédent dans E, c'est-à-dire 0 ou 1.

Surjection : Une application f est une surjection de E vers F lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent dans E par f, c'est-à-dire 1 ou plusieurs

Bijection : Une application f est une bijection de E vers F lorsqu'elle est à la fois injective et surjective. Cela signifie que tout élément de F admet au plus et au moins c'est-à-dire un unique antécédent dans E par f.

PARTIE B - « DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE » - Frédéric Sturm, INSA Lyon

Introduction

Bonjour. Nous nous intéressons dans ce module aux techniques de démonstration par récurrence.

La notion de démonstration (ou raisonnement) par récurrence est une notion qui revient fréquemment et à divers niveaux dans toutes les branches des mathématiques. Il apparaît alors nécessaire de bien maîtriser ce type de raisonnement. C'est précisément ce que nous allons faire ici. Nous allons pour cela procéder en deux temps.

Dans un premier temps, nous allons expliquer dans quel cadre on peut utiliser les techniques de démonstration par récurrence. Nous allons en donner le but, le principe et la méthodologie.

Dans un second temps, nous allons donner un exemple de démonstration par récurrence. Le résultat mathématique que nous allons montrer porte sur les polynômes de Bernoulli. Nous commencerons donc par quelques brefs rappels sur les polynômes de Bernoulli et effectuerons ensuite la démonstration.

Mais entrons sans attendre dans le vif du sujet.

Préambule - 1'18

En mathématiques, de nombreux résultats s'énoncent de la manière suivante : « Pour tout entier naturel $n \geq n_0$ $\mathcal{P}(n)$ ». Un tel résultat signifie que la propriété $\mathcal{P}(n)$ (qui dépend de n) est vraie pour toute valeur de n prise dans l'ensemble des entiers naturels et supérieure ou égale à n_0 (ici, n_0 désigne un entier naturel). C'est par exemple le cas lorsque l'on écrit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}_{\mathcal{P}(n)}.$$

(Figure 1)

Ici, n_0 vaut 1 et la propriété $\mathcal{P}(n)$ (que nous avons indiquée par l'accolade) prend la forme d'une égalité. C'est aussi le cas lorsque l'on écrit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 1 + nx \leqslant (1+x)^n}_{\mathcal{P}(n)}.$$

(Figure 2)

Cette fois-ci, l'entier n_0 est nul et la propriété $\mathcal{P}(n)$ prend la forme d'une phrase avec quantificateur. Elle débute en effet par : « pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+$ »

Le but d'une démonstration par récurrence est précisément de montrer qu'un énoncé de la forme « Pour tout entier naturel $n \geq n_0$ $\mathcal{P}(n)$ » est un énoncé vrai.

Principe de la démonstration – 0'58

Le principe d'une démonstration par récurrence exprime le fait que si la propriété est vraie au rang n_0 et si l'implication « $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ » est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ (on dit alors que $\mathcal{P}(n)$ est une propriété héréditaire), alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Une démonstration par récurrence s'effectue ainsi en deux étapes bien distinctes.

La première étape consiste à vérifier que la propriété est vraie au rang n_0. Cette première étape est qualifiée d'***étape d'initialisation***.

La seconde étape consiste à montrer que si la propriété est vraie au rang n alors elle est encore vraie au rang $n+1$. La propriété $\mathcal{P}(n)$ (que l'on suppose vraie) est alors appelée ***hypothèse de récurrence***. Cette seconde étape est qualifiée d'***étape d'hérédité***.

Polynômes de Bernoulli – 1'27

Donnons à présent un exemple de démonstration par récurrence.

On appelle ***polynômes de Bernoulli*** les polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout entier $n \geq 1$,

d'une part une relation de récurrence entre la dérivée du polynôme de Bernoulli au rang n avec le polynôme de Bernoulli au rang précédent $n-1$; c'est la relation :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \quad B_n'(x) = nB_{n-1}(x) \right)$$

(Figure 3)

et d'autre part une condition d'intégrale nulle sur l'intervalle [0,1], c'est-à-dire :

$$\int_0^1 B_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(Figure 4)

Le polynôme B_0 est le polynôme défini pour tout réel x par : $B_0(x) = 1.$
C'est un polynôme constant.

Les expressions des polynômes de Bernoulli s'obtiennent à partir de ces relations. Par exemple, on obtient pour B_1, B_2, B_3 et B_4 les expressions suivantes :

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

(Figures 5 et 6)

On constate que chacun des quatre polynômes que l'on vient d'écrire est normalisé, autrement dit que son coefficient de plus haut degré vaut 1. On constate de plus que tous ses coefficients sont des nombres rationnels, ce qui veut dire qu'ils s'écrivent comme le quotient d'un entier relatif et d'un entier naturel non nul, et il a un degré égal à son rang.

Ces constatations se généralisent d'ailleurs à n'importe quel rang n.

Proposition – 0'50

Montrons à présent le résultat suivant :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).}$$

(Figure 7)

Quel mode de raisonnement pouvons-nous utiliser ?

Remarquons que le résultat mathématique énoncé s'écrit sous la forme : « Pour tout entier naturel $n \geq n_0$ $\mathcal{P}(n)$ » où n_0 vaut 0 et où la propriété $\mathcal{P}(n)$ est ici définie par :

$$\text{« } \forall x \in \mathbb{R}\ B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x) \text{ »}.$$

L'utilisation d'un raisonnement par récurrence semble tout indiquée.

Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation de la récurrence – 0'47

Commençons par initialiser la récurrence (c'est la première étape de notre démonstration). Pour cela, vérifions que la propriété est vraie au rang 0.

Le polynôme B_0 étant constant, « $B_0(x)=1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ » implique que « $B_0(1-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ». D'autre part $(-1)^0 = 1$.

On a donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B_0(1-x)$ (qui vaut 1) est égal au produit de $(-1)^0$ (qui vaut 1) par $B_0(x)$ (qui vaut aussi 1). Nous venons donc de vérifier que la propriété était vraie au rang initial.

Hérédité (partie 1) – 1'01

Montrons à présent que la propriété est héréditaire (c'est la deuxième étape de notre démonstration). Autrement dit, montrons que l'implication « $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ » est vraie. Soit n un entier naturel. Supposons pour cela la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire supposons que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

(Figure 8)

(c'est notre hypothèse de récurrence), et montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(x).$$

(Figure 9)

Comment allons-nous procéder pour montrer ce résultat ? L'idée est de commencer par dériver l'application qui apparaît à la gauche du signe « égal », à savoir l'application qui à x associe $B_{n+1}(1 - x)$.

Hérédité (partie 2) – 1’47

On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \Big(B_{n+1}(1-x)\Big)' &= -B'_{n+1}(1-x) && \text{(égalité 1)} \\ &= -(n+1)B_n(1-x) && \text{(égalité 2)} \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)B_n(x) && \text{(égalité 3)} \\ &= (-1)^{n+1}B'_{n+1}(x) && \text{(égalité 4)} \end{aligned}$$

(Figure 10)

La première égalité s'obtient simplement en appliquant les règles de dérivation des fonctions composées.

La deuxième égalité s'obtient en utilisant la relation de récurrence existant entre la dérivée du polynôme de Bernoulli, à un certain rang (ici au rang n+1) avec le polynôme de Bernoulli au rang précédent (ici n) et en l'énonçant non pas en x mais en 1 - x. Ceci est légitime puisque cette relation est vraie pour toute valeur de x. Elle est donc aussi vraie pour toute valeur de 1 - x.

La troisième égalité s'obtient en utilisant notre hypothèse de récurrence qui nous autorise à remplacer $B_n(1-x)$ par $(-1)^n B_n(x)$.

Enfin, la quatrième égalité s'obtient en utilisant à nouveau la relation de récurrence entre la dérivée du polynôme de Bernoulli au rang n+1 avec le polynôme de Bernoulli au rang n.

On a ainsi obtenu que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Big(B_{n+1}(1-x)\Big)' = (-1)^{n+1} B'_{n+1}(x).$$

(Figure 11)

Un calcul immédiat de primitive nous donne alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(x) + \alpha$$

(Figure 12)

où α (alpha) désigne une constante d'intégration que nous allons maintenant déterminer.

Hérédité (partie 3) – 1'22

Pour calculer α, nous intégrons l'égalité que nous venons d'obtenir entre 0 et 1, ce qui nous donne l'égalité suivante :

$$\int_0^1 B_{n+1}(1-x)\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \alpha\,\mathrm{d}x.$$

(Figure 13)

On vérifie que $\int_0^1 \alpha\,\mathrm{d}x$ est égale à α, (c'est immédiat). De plus, $\int_0^1 B_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ est nulle (c'est une des propriétés des polynômes de Bernoulli). Enfin, l'intégrale présente dans le membre de gauche est nulle aussi. Il suffit pour s'en convaincre d'effectuer le changement de variable $y = 1 - x$, ce qui nous donne que

$$\int_0^1 B_{n+1}(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 B_{n+1}(y)\mathrm{d}y$$

(Figure 14)

et cette dernière intégrale est nulle d'après (encore une fois) la propriété d'intégrale nulle des polynômes de Bernoulli. On a donc obtenu que α (alpha), était nul et, par conséquent, que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1}B_{n+1}(x),$$

(Figure 15)

ce qui termine la démonstration, pour tout entier naturel n, de l'implication « $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ ».

Conclusion

Faisons à présent le bilan de notre démonstration.

Nous avons dans un premier temps vérifié que la propriété était vraie au rang 0. Cette première étape, absolument nécessaire, a permis d'initialiser proprement la récurrence.

Dans un second temps, nous avons vérifié que la propriété était héréditaire. Nous avons pour cela supposé que la propriété était vraie au rang n et en avons déduit qu'elle était encore vraie au rang n+1.

La récurrence permet alors d'affirmer que la propriété est vraie pour tout entier naturel n. La démonstration est donc terminée.

Signalons que l'utilisation d'un raisonnement par récurrence s'est imposée ici de manière tout à fait naturelle puisque la définition même des polynômes de Bernoulli fait apparaître une relation de récurrence entre la dérivée du polynôme à un certain rang et le polynôme au rang précédent.

Nous avons d'ailleurs nous-même utilisé à plusieurs reprises cette relation de récurrence lorsque nous avons montré que la propriété était héréditaire.

Je vous remercie pour votre attention.

Exercice de type Oui / Non

Énoncé - Dire si les propositions suivantes peuvent être démontrées en utilisant un raisonnement par récurrence (*attention, dans tous les cas, les énoncés mathématiques sont des énoncés vrais*). Dans l'affirmative, donner la propriété $\mathcal{P}(n)$.

1.	« $\forall (A,B) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ \left(\forall \varepsilon > 0\ A < B + \varepsilon\right) \Longrightarrow A \leqslant B$ ».
2.	« $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
3.	« $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0,\pi]\ \lvert\sin(nx)\rvert \leqslant n \sin x$ ».
4.	« $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\ x + y\sqrt{2} = 1 \iff \left(x = 1 \text{ et } y = 0\right)$ ».
5.	Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. une suite arithmétique. « $\forall n \in \mathbb{N}\ S_n = \dfrac{(u_0+u_n)}{2}(n+1)$ ». b) Soit $n \in \mathbb{N}$. une suite géométrique de raison q. « $\forall n \in \mathbb{N}\ S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ».

Corrigés :

1.	Non.
2.	Oui. On a : $\mathcal{P}(n) =$ « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
3.	Oui. On a : $\mathcal{P}(n) =$ « $\forall x \in [0,\pi]\ \lvert\sin(nx)\rvert \leqslant n \sin x$ ».
4.	Non.
5.	a) Oui. On a : $\mathcal{P}(n) =$ « $S_n = \dfrac{(u_0+u_n)}{2}(n+1)$ ». b) Oui. On a : $\mathcal{P}(n) =$ « $S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ».