TRANSCRIPTION DU MODULE FILIPE
CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL - 20'57

Introduction

Bonjour, dans ce module nous allons nous intéresser à la cinématique du point matériel. La cinématique c'est la partie de la mécanique qui décrit le mouvement d'un objet. Cet objet est considéré infiniment petit, c'est pour ça qu'on l'appelle point matériel, et on le note M (grand "M"). En général, sa masse est notée m (petit "m").

L'ensemble des points, des positions précisément, décrite par le point M, est appelé trajectoire. C'est l'ensemble des positions bien sûr au cours du temps. Sur sa trajectoire le point M a une vitesse notée V (grand "V") et une accélération γ (gamma).

Repère Coordonnées Cartésiennes

Pour étudier le mouvement d'un point M il faut se donner un repérage. C'est en fait pour connaître les différentes positions de ce point M. Et pour cela on est obligé de définir un espace. Cet espace est appelé référentiel.

Dans ce référentiel nous allons définir un repère. En général on considère un repère que l'on appelle repère orthonormé, et que l'on note Ox Oy Oz.

Sur ces axes on définit des vecteurs unitaires $\vec{i}$ (petit "i") pour l'axe Ox, $\vec{j}$ (petit "j") pour l'axe Oy, $\vec{k}$ (petit "k") pour l'axe Oz. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont appelés vecteurs unitaires, je l'ai dit.

Par définition nous avons $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ (i vectoriel j égal k).

Repère Coordonnées Cylindriques

Comme vous l'avez vu dans les diapositives précédentes, le point M en fait peut être un avion. Nous pouvons repérer dans le système d'axes Oxyz l'avion, donc le point M à l'aide d'un vecteur qui est le vecteur $\vec{OM}$. Ce vecteur $\vec{OM}$ peut s'écrire $x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ (x de t petit i plus y de t petit j plus z de t petit k).

$x(t), y(t), z(t)$ (x de t, y de t, z de t) sont appelées coordonnées cartésiennes du point M.

Dans certains cas le repérage cartésien n'est pas bien adapté pour décrire le mouvement du point M. C'est le cas de notre avion qui a un mouvement curviligne. Dans ce cas on peut utiliser un système de coordonnées qu'on appelle les coordonnées cylindriques.

Les coordonnées cylindriques sont travaillées... sont utilisées à l'aide de trois vecteurs unitaires : les vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ (u r, u thêta, et u z).

L'angle qui existe entre l'axe Ox et le vecteur $\vec{u}$ (petit u) est l'angle θ (thêta). Cet angle dépend du temps si bien qu'on le note $\theta(t)$ (thêta de t).

Dans ce repérage en coordonnées cylindriques, nous pouvons identifier notre avion, le point M, à l'aide du vecteur $\vec{OM}$. Ce vecteur dans ce cas peut s'écrire $\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M}$ (OM égal OM prime plus M prime M). M' (M prime) est la projection du point M dans le plan xOy.

On peut aussi écrire que $\vec{OM}$ c'est égal à $r(t)\vec{u}_r + z(t)\vec{u}_z$ (r de t u r plus z de t u z). $r(t)$ (r de t) est la norme du vecteur $\vec{OM}'$ (OM prime).

Nous remarquons aussi que le produit vectoriel $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z$ (u r vectoriel u thêta égal u z). Et enfin nous remarquerons que les coordonnées $r(t)$ et $\theta(t)$ (r de t et thêta de t) sont appelées coordonnées polaires du point M' (M prime), donc coordonnées polaires dans le plan xOy.

Trajectoire

Nous venons de voir deux systèmes de coordonnées :

- le système de coordonnées cylindriques $r(t)$ (r de t), $\theta(t)$ (thêta de t), $z(t)$ (z de t), et

- le système de coordonnées cartésiennes $x(t)$ (x de t), $y(t)$ (y de t), $z(t)$ (z de t).

La relation mathématique qui associe par exemple $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (x de t, y de t, z de t) est l'équation de la trajectoire.

Vous concevez facilement que en fait dans un mouvement tridimensionnel, à trois dimensions, l'équation de la trajectoire peut être très complexe, donc pour étudier l'équation de la trajectoire nous allons nous placer dans le plan xOy. Donc nous allons travailler deux coordonnées cartésiennes par exemple, $x(t)$ et $y(t)$ (x de t et y de t).

Dans notre cas l'équation de la trajectoire sera l'expression mathématique indépendante du temps qui va associer $x(t)$ et $y(t)$ (x de t et y de t).

Si nous ne pouvons pas avoir une relation simple nous laissons la forme x en fonction de t, la forme y en fonction de t, et cet ensemble là est appelé équation paramétrique de la trajectoire.

Prenons un exemple, on va reconsidérer... on va considérer le mouvement d'une balle de tennis. On peut écrire dans notre cas que $x(t) = t$ (x de t égal t), $y(t) = bt^2 + ct$ (y de t égal b t carré plus c t). a, b, et c sont des constantes positives ou négatives. t est le temps, positif évidemment, ou nul.

Dans notre cas la formulation

$x(t) = at$ (x de t égal at),

$y(t) = bt^2 + ct$ (y de t égal bt carré plus ct),

c'est l'équation paramétrique de la trajectoire.

En revanche, si on rend cette équation... si on rentre (ndlr: l'expression correcte est : "si on rend") ces équations indépendantes du temps on constate que $y = Ax^2 + Bx$ (y égal grand a x carré plus grand b x). Cette relation là est l'équation de la trajectoire. On constate que c'est l'expression d'une parabole.

Abscisse Curviligne

Parfois, cette notion d'équation de la trajectoire n'est pas encore suffisante, donc nous définissons la notion d'abscisse curviligne.

Si on suppose qu'à l'instant $t = 0$ (t égal zéro) le point M, la balle de tennis, est au point M_0 (M zéro), et qu'à l'instant t le point M..., la balle de tennis est au point M, et bien l'arc de la trajectoire entre M_0 (M zéro) et M est appelé abscisse curviligne.

En général, on écrit l'abscisse curviligne... on la note... $s(t)$ (s de t).

Vitesse Notion

Au début du module nous avons vu que le point M avait une vitesse V et une accélération γ (gamma) sur sa trajectoire. Nous allons tout d'abord nous intéresser à la notion de vitesse.

Le vecteur vitesse $\vec{V}$ (grand v) du point M c'est la dérivée du vecteur $\vec{OM}$ par rapport au temps. Nous écrivons d'ailleurs que vitesse V... vecteur vitesse $\vec{V} = d(\vec{OM})/dt$ (v est égal à d de OM sur dt).

Le $\vec{V}$ (vecteur grand v) c'est un vecteur qui est porté par la tangente à la trajectoire et il est toujours dirigé dans le sens croissant des abscisses curvilignes $s(t)$ (s de t).

Si nous appelons $\vec{\tau}$ (tau) le vecteur unitaire de la tangente, vecteur unitaire dirigé dans le sens des abscisses curvilignes croissantes, nous pouvons écrire que le $\vec{V} = V\vec{\tau}$ (vecteur grand V égal V tau). Et dans ce cas V est la norme de la vitesse $\vec{V}$.

Si on se repère maintenant par rapport aux abscisses curvilignes, et bien en fait on constate que la norme de $\|\vec{V}\| = ds/dt$ (grand v est égale à ds sur dt), c'est-à-dire c'est la dérivée première de l'abscisse curviligne... dérivée première par rapport au temps bien sûr.

Vitesse dans le Plan

Maintenant nous allons considérer quelques expressions de la vitesse dans le plan xOy puisque nous avons considéré un mouvement plan, un mouvement planaire.

En coordonnées cartésiennes le vecteur $\vec{OM}$ s'écrit $x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ (x de t petit i plus y de t petit j). Et bien la vitesse va être $(dx/dt)\vec{i} + (dy/dt)\vec{j}$ (dx sur dt petit i plus dy sur dt petit j). Ou encore $\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$ (x point i plus y point j), ou précisément $\dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$ (x point de t i plus y point de t j).

En coordonnées polaires, OM s'écrit $r(t)\vec{u}_r$ (r de t ur) comme nous l'avons vu précédemment, et bien dans ce cas le vecteur vitesse $\vec{V}$ (grand v) s'écrit $(dr/dt)\vec{u}_r$ (dr sur dt u de r) (note : on doit dire u r et non pas u de r) plus $r(t)du_r/dt$ (r de t d de ur sur dt). Soit encore $\dot{r}\,\vec{u}_r$ (r point u r) plus $r(t)du_r/dt$ (r de t d de ur sur dt) qui en l'occurrence est $\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_\theta$ (thêta point de t u thêta).

Vitesse Exemple

Maintenant, revenons à notre balle de tennis sur sa trajectoire parabolique. Et bien en fait le point OM est repéré par le vecteur $\overline{OM}$ qui s'écrit $at\vec{i} + (bt^2 + ct)\vec{j}$ (at petit i plus bt carré plus ct le tout multiplié par le vecteur petit j). Dans ce cas le vecteur vitesse $\vec{V}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes $\vec{V}_x + \vec{V}_y$ (V x plus V y) , soit encore $(dx/dt)\vec{i} + (dy/dt)\vec{j}$ (dx sur dt petit i plus dy sur dt petit j), ou encore plus précisément dans ce cas $a\vec{i} + (2bt + c)\vec{j}$ (a i plus donc entre parenthèses deux b t plus c vecteur petit j).

Nous avons parlé de norme de vitesse tout à l'heure. Et bien la norme du vecteur vitesse dans ce cas va s'écrire $\sqrt{a^2 + (bt + c)^2}$ (racine de a carré plus entre parenthèses deux bt plus c au carré).

Accélération

Nous allons considérer maintenant la notion d'accélération. Alors l'accélération du point M, de façon totale, est notée $\vec{\gamma}$ (vecteur gamma). Par définition $\vec{\gamma}$ (gamma) c'est la dérivée première du vecteur vitesse. Alors évidemment puisque nous avons vu que le vecteur vitesse est la dérivée première du vecteur $\vec{OM}$, et bien en fait le vecteur $\vec{\gamma}$ (gamma) , le vecteur accélération, est la dérivée seconde du vecteur $\vec{OM}$, par rapport au temps bien sûr.

Donc on peut écrire aussi que $\vec{\gamma}$ (gamma), puisqu'on vient de dire que c'est dv/dt (dv sur dt), c'est également (d de s point tho), puisque précédemment nous avons vu que la vitesse s'écrivait $(ds/dt)\vec{\tau}$ (ds sur dt tho) ou $\dot{s}\vec{\tau}$ (s point tho).

Alors si nous dérivons cette expression $\dot{s}\vec{\tau}$ (s point tho) par rapport au temps et bien nous avons $\vec{\gamma} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}(d\vec{\tau}/dt)$ (gamma égal s point point tho plus s point d tho sur dt). Et en fait on verra aussi plus tard, là pour l'instant je vous le donne simplement comme ça, donc on peut écrire que $\vec{\gamma}$ (gamma) c'est $\vec{\gamma} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}^2/R\vec{n}$ (s point point tho plus s point carré sur grand r n).

$\vec{n}$ c'est le vecteur qui est perpendiculaire au vecteur $\vec{\tau}$ (tau) et qui est pointé vers le centre de courbure de la trajectoire. Et R est le rayon de courbure de la trajectoire, au point M bien sûr.

Alors on peut dire aussi que le vecteur $\vec{\gamma}$(gamma) peut être décomposé en deux vecteurs : un vecteur qui est porté par le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ (tau) et un vecteur qui va être porté par le vecteur unitaire $\vec{n}$ (petit n). C'est-à-dire qu'en fait on va écrire que $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$ (gamma égal gamma t plus - ou gamma tho - plus gamma n). $\vec{\gamma}_t$ (Gamma t) étant porté par le vecteur $\vec{\tau}$ (tho) et $\vec{\gamma}_n$ (gamma n) par le vecteur $\vec{n}$.

Le vecteur $\vec{\gamma}_t$ (gamma t), porté par le vecteur $\vec{\tau}$ (tho), qui en fait est égal à $\ddot{s}\vec{\tau}$ (s point point tho) est appelé accélération tangentielle du point M.

Et le vecteur $\vec{\gamma}_n$ (gamma n), qui est en réalité $(\dot{s}^2/R)\vec{n}$ (s point carré sur R vecteur petit n) est appelé accélération normale du point M.

$\vec{\gamma}_{totale}$ (gamma totale) est donc égale à $\vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$ (gamma t plus gamma n).

Accélération Plan et Exemple

Nous venons de voir que le vecteur accélération gamma était décomposé en deux vecteurs $\vec{\gamma}_t$ (gamma t) et $\vec{\gamma}_n$ (gamme n). $\vec{\gamma}_t$ (gamma t), accélération tangentielle, est portée par le vecteur $\vec{\tau}$ (tho). $\vec{\gamma}_n$ (gamma n), accélération normale, est portée par le vecteur $\vec{n}$. L'ensemble des trois vecteurs $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{k}$ (tho, n, et k) constitue la base de Frénet.

Maintenant, réfléchissons... on peut aussi exprimer le vecteur $\vec{\gamma}$ (gamma) en coordonnées cartésiennes. On va regarder... on va aussi se placer dans un plan, dans le plan xOy. Et dans ce cas nous pouvons écrire que $\vec{\gamma}$ (gamma) c'est aussi $\vec{\gamma}_x + \vec{\gamma}_y$ (gamma x plus gamma y). $\vec{\gamma}_x$ (gamma x) sera la composante portée par l'axe Ox, et $\vec{\gamma}_y$ (gamma y) sera la composante de l'accélération portée par l'axe Oy.

$\vec{\gamma}$ (gamma) est toujours la dérivée seconde du vecteur $\vec{OM}$, donc on pourra... on peut écrire que

$\vec{\gamma}$ (gamma) c'est $(d^2x/dt^2)\vec{i} + (d^2y/dt^2)\vec{j}$ (d deux x sur dt deux vecteur petit i plus d deux y sur dt deux vecteur petit j).

Ou encore $\vec{\gamma} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}$ (gamma égal x point point petit i plus y point point petit j).

Appliquons ces quelques données, ces notions, à l'exemple de notre balle de tennis : nous avons vu qu'en coordonnées cartésiennes pour la balle de tennis nous avions $x(t) = at$ (x de t égal at) et $y(t) = bt^2 + ct$ (y de t était égal à bt carré plus ct). Et bien dans ce cas le vecteur accélération va s'écrire $\vec{\gamma} = 0\vec{i} + 2b\vec{j}$ (gamma égal zéro fois vecteur petit i plus deux b vecteur petit j). Et d'ailleurs dans cet exemple b est négatif.

Mouvement Rectiligne Uniforme

Pour terminer ce module nous allons étudier un mouvement courant, que tout le monde connaît, qui est en fait le mouvement rectiligne. Nous allons voir trois cas de mouvement rectiligne :

le mouvement rectiligne uniforme,

le mouvement rectiligne uniformément accéléré, et

le mouvement rectiligne uniformément décéléré.

Considérons le premier mouvement, le mouvement uniforme.

Un mouvement rectiligne uniforme est défini quand la vitesse de ce mouvement est constante. En fait on écrit v, qui est égal à dx/dt (dx sur dt), égal constante. Bien sûr vous allez écrire que l'accélération, qui est la dérivée de la vitesse, est nulle.

Et vous voyez sur le transparent d'ailleurs on vous a... si on prend l'exemple d'un piéton qui marche à une vitesse de un mètre par seconde et bien l'accélération est nulle et elle est de zéro mètre par seconde carrée.

Ce sont les unités respectives de vitesse et d'accélération.

Et dans ce cas et bien si nous intégrons l'abscisse, donc en fait pour avoir la position du piéton, c'est-à-dire si nous cherchons la valeur de x, et bien nous voyons que $x = vt + x_0$ (x égal vt plus x zéro).

v évidemment est la norme de la vitesse du piéton, et x_0 (x zéro) est la position du piéton à l'instant initial c'est-à-dire à l'instant $t = 0$ (t égal zéro).

Mouvement Rectiligne Uniformément accéléré

Maintenant considérons le mouvement uniformément accéléré. Ça va être le cas du plongeur, alors le plongeur qui est soumis à l'accélération de la pesanteur qui est de 9,81 mètre pas seconde carrée. Qu'est-ce qu'on entend par mouvement uniformément accéléré ? Ça veut dire que l'accélération cette fois-ci est constante. Donc dans ce cas, la vitesse qui est la primitive de l'accélération va donc pouvoir s'écrire $v = \gamma t + v_0$ (v égal gamma t plus v zéro). v_0 (v zéro) ce sera la vitesse du plongeur à l'instant initial c'est-à-dire à l'instant t = 0 (t égal zéro).

Et puis si nous intégrons pour regarder la position du plongeur suivant sa trajectoire rectiligne et bien nous allons avoir $y = 1/2\gamma t^2 + v_0 t + y_0$ (y égal un demi de gamma t deux plus v zéro t plus y zéro).

Alors un message important, c'est que en fait dans ce cas là nous pouvons remarquer que le produit scalaire de l'accélération et de la vitesse, c'est-à-dire $\vec{\gamma}.\vec{V}$ (vecteur gamma scalaire vecteur v) est positif.

Mouvement Rectiligne Uniformément décéléré

Regardons maintenant le cas d'une balle... d'une boule de bowling. Donc cette boule a un mouvement uniformément décéléré. Ça veut dire quoi ? Ça veut dire que gamma est toujours constante, mais nous allons avoir dans ce cas le produit scalaire $\vec{\gamma}.\vec{V}$ (gamma v) négatif, et on va donc pouvoir écrire que va vitesse est donc égale à $-\gamma t + v_0$ (moins gamma t plus v zéro) et bien sûr $y = -1/2\gamma t^2 + v_0 t + y_0$ (y égal moins un demi de gamma t carré plus v zéro t plus y zéro).

Là aussi regardons quelques dimensions : γ (gamma) peut être de l'ordre de deux mètres par seconde carrée. Et dans un mouvement décéléré la balle, pour un temps donné précis, pourra s'arrêter c'est-à-dire pourra atteindre un temps pour lequel sa vitesse sera nulle.

Conclusion

Ce module est maintenant terminé, nous avons vu le repérage d'un point matériel, ensuite nous avons pu identifier l'équation de sa trajectoire, la notion de vitesse, d'accélération. Enfin nous avons étudié, assez simplement il est vrai le mouvement rectiligne. Vous avez maintenant toutes les bases pour aborder un problème de cinématique du point matériel et aussi, disons, étudier d'autres mouvements, par exemple le mouvement circulaire.